LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI

Un insieme è una collezione di oggetti (elementi)

es: insieme X dei numeri naturali pari minori di 10 ha per elementi 0, 2, 4, 6, 8

$X = \{0,2,4,6,8\} = \{x : x \text{ è numero naturale pari minore di } 10\}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$p(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

$S = \{x : x \text{ è un numero intero tale che } x^4 - 3x^2 + 2 = 0\}$

Notazione: se x è un elemento dell'insieme X si scrive $x \in X$, $X \ni x$

$X = Y$ se e solo se x appartiene a $Y \to \forall x (x \in X \iff x \in Y)$

NON OGNI PROPRIETÀ DEFINISCE UN INSIEME

$X = \{x : x \notin x\}$ $\quad x \in X \Rightarrow x \notin X$ $\quad x \notin X \Rightarrow x \in X$

- Diciamo che l'insieme A è INCLUSO in B scritto $A \subseteq B$ se e solo se ogni elemento di A è anche l'elemento di B $(\forall a \in A (a \in B))$, quindi vale sempre $A \subseteq A$, inoltre $A = B$ sse $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Esiste un insieme che non ha elementi: l'insieme vuoto $\emptyset$, vale $\emptyset \subseteq X$, qualunque sia X

ATTENZIONE: $X \in Y \neq X \subseteq Y$

- INTERSEZIONE: dati due insiemi A e B e definito l'insieme intersezione $A \cap B$: "A intersecato B"

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è pari}\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è primo}\}$

$A \cap B = \{2\}$

- UNIONE: dati A e B, è definito l'insieme UNIONE $A \cup B$ "A unito B" $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

- COMPLEMENTO: se è fissato un insieme A, dato un suo sottoinsieme B ($B \subseteq A$) ce n'è uno altro "complementare di B in A"

$B^c = \{x \in A : x \notin B\}$ $B \cap B^c = \emptyset$ $B \cup B^c = A$

esercizi: dimostrare che:

$A \subseteq B \quad X \subseteq Y \Rightarrow Y^c \subseteq X^c$

$(X^c)^c = X$

$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ ($\forall z$, è vero che $z \in (X \cap Y)^c$ sse $\neg(z \in X \wedge z \in Y)$ sse $z \notin X \vee z \notin Y$ sse $z \in X^c \vee z \in Y^c$

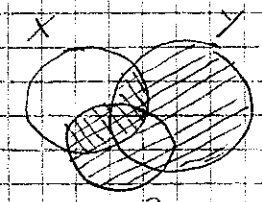
$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ LEGGI DI

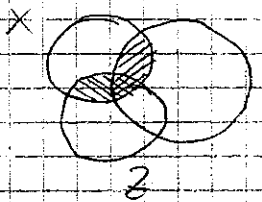
$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$ DE MORGAN

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

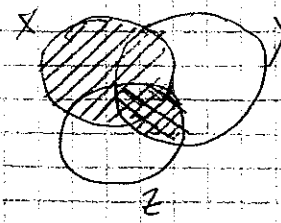
$X \cap (Y \cup Z) = X \cap Y + Y \cap Z$

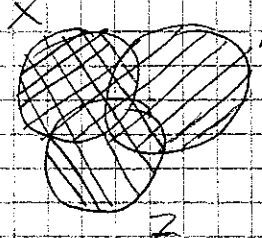
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$





esercizio: dimostrare le distributività





$X \cap (Y \cup Z) = X \cap Y + X \cap Z$

$X \cap (Y \cup Z) = \{\exists x : x \in X \wedge (x \in Y \vee x \in Z)\}$

$X \cap Y \# U \; X \cap Z = \{\exists x : x \in X \wedge (x \in Y \vee x \in Z\}$

INSIEME DELLE PARTI DI UN INSIEME X

$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$

es. = $X = \{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(X) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

X ha 3 elementi e $\mathcal{P}(X)$ ha $8 = 2^3$ elementi

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ESERCIZIO

Se $X = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ è un insieme di n elementi allora $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi

$Y = \{a, b\}$ $\mathcal{P}(Y) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Sotto: se Y è un insieme; $X = Y \cup \{c\}$ con $c \notin Y$, allora

$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y) \cup \{A \cup \{c\} : A \in \mathcal{P}(Y)\}$

↓

I sottoinsiemi di X sono esattamente i sottoinsiemi di Y, più i sottoinsiemi di ~~se~~ Y a cui aggiungiamo l'elemento c

$\mathcal{P}(X) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

Inoltre i due gruppi sono disgiunti (non hanno elementi comuni e gli elementi di $\mathcal{P}(Y)$ sono tanti quanti gli elementi di $\{A \cup \{c\} : A \in \mathcal{P}(Y)\} = \{A \in \mathcal{P}(X) : c \in A\}$

Il numero di elementi di un insieme finito S si denota $|S|$ es: $|\{a,b,c\}| = 3$

MORALE

Si ha, quindi, se $X = Y \cup \{c\}$ $c \in Y$ si ha

$$|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(Y)| + |\mathcal{P}(Y)| = 2|\mathcal{P}(Y)|$$

Se si ha $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$

Se si ha 1 $|\mathcal{P}(X)| = 2 = 2^1$

$$|\mathcal{P}(X \cup \{c\})| = 2|\mathcal{P}(X)| \quad |\mathcal{P}(X \cup \{c\} \cup d)| = 2|\mathcal{P}(X \cup \{c\})|$$

PRODOTTI CARTESIANI

La coppia ordinata di componenti a e b, è denotata (a,b) (volendo si può identificarla con l'insieme $\{\{a\},\{a,b\}\}$

diciamo che a è la prima componente e b è la seconda componente della coppia (a,b)

Dati due insiemi X e Y è definito il PRODOTTO CARTESIANO $X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$

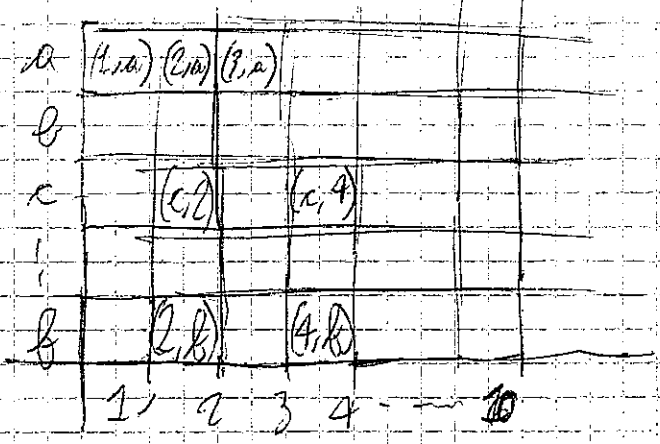
Fatto: per insiemi finiti vale $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$

Es. $X = \{1,2,10,\dots\}$ $Y = \{a,b,c,d,e,f\}$

$X \times Y = \{(1,a),(1,b),(1,c),\dots,(2,a),(2,b),\dots(10,a)\dots(10,f)\}$

graficamente, il prodotto cartesiano si può disporre in un ~~triangolo~~ rettangolo

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

NOTAZIONE: Per indicare brevemente la somma di certi numeri $X_1, X_2, X_3, \dots X_n$ si usa la notazione $\sum$ di SOMMATORIA: $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\downarrow$

SOMMARE GLI X_i PER i CHE VA DA 1 A n

ES $= \sum_{i=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

L'indice di somma si può indicare indifferentemente con un simbolo o un altro (indice muto, dummy index)

Analogamente si considerano i PRODOTTORIE $\prod_{k=1}^{n} X_k = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$. Più in generale, una FAMIGLIA di numeri con indici in un insieme I, è $\{a_i\}_{i \in I}$

Se $I = \{1,2,3,4,5\}$ allora $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

Se $(a_i)_{i \in I}$ è una fam. $\sum_{i \in I} a_i$

ES

$$\sum_{i \in I} a_i \cdot \sum_{j \in J} b_j = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j$$